УДК 517.4

М. В. Кретов

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрено приближение почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве тригонометрическими полиномами.

Approach of almost periodic function with values in Banach space by trigonometric polynomials is considered.

Ключевые слова: почти периодическая функция, банахово пространство, тригонометрический полином.

Key words: almost periodic function, Banach space, a trigonometric polynomial.

Основной в теории скалярных почти периодических функций является теорема аппроксимации, утверждающая, что каждую почти периодическую функцию можно равномерно на всей оси аппроксимировать тригонометрическими многочленами [1]. Отсюда вытекает, что эта теорема справедлива и для почти периодических вектор—функций со значениями в конечномерном пространстве, то есть такую функцию можно равномерно на всей оси аппроксимировать вектор—функциями, у которых компоненты являются тригонометрическими многочленами. Можно показать, что аналогичный результат имеет место для почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве E. Для этого введем понятие тригонометрического полинома в пространстве E.

Определение. Выражение

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\nu_k x},$$

где C_k— элементы пространства E; $i=\sqrt{-1}$; ν_k и x — действительные числа, называется *тригонометрическим полиномом в банаховом пространстве E*.

Теорема. *Пусть f — почти периодическая функция со значениями в банаховом пространстве E. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существует конечный тригонометрический многочлен*

$$P_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\nu_k x},$$

удовлетворяющий неравенству $\left\|f(x)-p_\varepsilon(x)\right\|<\varepsilon$, где x — любая точка действительной оси.

Доказательство. Обозначим множество значений функции f через B. Множество B компактно [2]; значит, существует конечная ε-сеть для любого числа $\varepsilon>0$: $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то есть для любого числа x_0 найдется такое число k_0, что будет иметь место $\left\|f(x_0)-y_{k_0}\right\|<0{,}5\varepsilon$. (3)

Рассмотрим функцию

$$y(x)=\frac{\sum_{k=1}^{m}\mu_k(x)y_k}{\sum_{k=1}^{m}\mu_k(x)},$$

где

$$\mu_k(x)=\begin{cases}\varepsilon-\|f(x)-y_k\|, \text{ если } \|f(x)-y_k\|<\varepsilon,\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Функция $\mu_k(x)$ является почти периодической функцией, так как

$$\left|\mu_k(x+\tau)-\mu_k(x)\right|=\left|\varepsilon-\|f(x+\tau)-y_k\|-\varepsilon+\|f(x)-y_k\|\right|<2\varepsilon.$$

Легко видеть, что $\inf\limits_{-\infty<x<+\infty}\left|\sum_{k=1}^{m}\mu_k(x)\right|=\gamma>0;$ значит, $y(x)$ является почти периодической функцией.

Заметим, что при фиксированных x значения функции $y(x)$ принадлежат выпуклой оболочке тех y_k, которые удовлетворяют неравенству $\|f(x)-y_k\|<\varepsilon;$ следовательно, $\|f(x)-y(x)\|<\varepsilon$ для любого числа x.

Так как функция $y(x)$ является почти периодической вектор—функцией со значениями в конечномерном пространстве, которую можно аппроксимировать тригонометрическими многочленами, то теорема доказана.

Следствие. *Для каждой почти периодической функции $f(x)$ со значениями в банаховом пространстве E существует среднее значение*

$$M\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

Доказательство. Согласно теореме рассмотрим тригонометрический многочлен $Q(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{i\lambda_k x}$ такой, что $\|f(x)-Q(x)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Так как существует $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Q(x)\,dx$, то для функции $a(T)=\frac{1}{T}\int_0^T Q(x)\,dx$ при достаточно больших T_1 и T_2 имеет место неравенство $\|a(T_1)-a(T_2)\|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим функцию $b(T)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$ и оценим разность при достаточно больших T_1 и T_2:

$$\|b(T_1)-b(T_2)\|=\left\|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(x)dx-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}f(x)dx\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}(f(x)-Q(x))\,dx\right\|+\left\|\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}(f(x)-Q(x))\,dx\right\|+\left\|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}Q(x)dx-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}Q(x)\,dx\right\|<\frac{3}{2}\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — любое положительное число.

Следовательно, множество значений функции $b(T)$ фундаментально и элементы этого множества есть элементы пространства E, а так как банахово пространство полно, то множество $b(T)$ сходится к некоторому элементу из E. Следствие доказано.

Список литературы

1. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М., 1953.

2. *Кретов М. В.* О почти периодических функциях со значениями в банаховом пространстве // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2010. Вып. 4. С. 162—166.

Об авторе

М. В. Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: kretov20062006@yandex.ru

About author

Dr M. V. Kretov — assistant professor, I. Kant Federal University, Kaliningrad.

E-mail: kretov20062006@yandex.ru